Summen von Quadraten in arithmetischen Funktionenkörpern

von *Florian Pop* in Bonn

Ziel vorliegender Note ist folgender

Satz. *Sei K ein beliebiger Zahlkörper und $F|K$ ein Funktionenkörper einer Variablen. Dann gilt:*

(1) *Ist $f \neq 0$ Summe von Quadraten in F, und besitzt f keine reellen Null- oder Polstellen, so ist f Summe von höchstens fünf Quadraten in F. Dies ist z.B. der Fall für alle Funktionen $f \neq 0$, wenn F keine Anordnungen zuläßt.*

(2) *Im allgemeinen ist jede Summe von Quadraten in F darstellbar als Summe von höchstens sechs Quadraten in F.*

Beweis. Das Hauptwerkzeug zum Beweis ist das Katosche Lokal–Global Prinzip für reduzierte Normen von Divisionsalgebren, siehe Kato [K]. Siehe hierzu auch Colliot-Thélènes Appendix in [K]; sowie Colliot-Thélène–Jannsen [CT–J] für höhere Dimensionen; und Pourchet [Po] für genauere Aussagen im Fall $F = K(t)$.

Wir können annehmen, daß K der Konstantenkörper von F ist. Sei $X \to K$ das glatte projektive Modell von $F|K$. Für eine beliebige Stelle $\mathfrak{v}$ von K bezeichne $K_\mathfrak{v}$ die Kompletierung von K an $\mathfrak{v}$, und $X(K_\mathfrak{v})$ die Menge der $K_\mathfrak{v}$-rationalen Punkte von X. Es gilt:

a) Ist $X(K_\mathfrak{v})$ nicht leer, so ist $X(K_\mathfrak{v})$ ein kompakter topologischer Raum, und jede Funktion $f \in F$ definiert eine stetige Abbildung $f_\mathfrak{v} : X(K_\mathfrak{v}) \to K_\mathfrak{v} \cup \infty$.

Für einen (Weil-)Primdivisor P von X sei $\kappa(P)$ der Restklassenkörper von P. Wir sagen das P $\mathfrak{v}$-adisch ist, falls $\kappa(P)$ eine K-Einbettung in $K_\mathfrak{v}$ zuläßt. Entsprechend sagen wir, daß P total nicht $\mathfrak{v}$-adisch ist, falls $\kappa(P)$ keine K-Einbettungen in $K_\mathfrak{v}$ zuläßt. Es gilt:

b) X besitzt $\mathfrak{v}$-adische Primdivisoren $\Leftrightarrow$ $X(K_\mathfrak{v})$ ist nicht leer.

c) Ist $K_\mathfrak{v} \neq \mathbb{C}$, so besitzt X (viele) total nicht $\mathfrak{v}$-adische Primdivisoren.

Wir sagen, daß ein Primdivisor P von $F|K$ reell ist, falls P $\mathfrak{v}$-adisch bezüglich einer reellen Stelle $\mathfrak{v}$ von K ist, und daß P total nicht reell ist, falls P total nicht $\mathfrak{v}$-adisch für alle reellen Stellen $\mathfrak{v}$ von K ist. Allgemeiner, ein divisor A von $F|K$ heiße reell, falls in seinem Träger nur reelle Primdivisoren vorkommen, und total nicht reell, falls in seinem Träger nur total nicht reelle Primdivisoren vorkommen. Jeder Divisor A von X hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$A = A^{\mathrm{reell}} + A^{\mathrm{t.n.\,reell}}$$

mit A^{reell} reell und $A^{\mathrm{t.n.\,reell}}$ total nicht reell. Es gilt:

d) Ist $f \neq 0$ Summe von Quadraten in F, so kann $\big(f\big)^{\text{reell}}$ dargestellt werden in der Form $\big(f\big)^{\text{reell}} = 2A$ mit A reellem Divisor von X. Hier ist $A = 0$ zugelassen, sodaß diese Bedingung leer ist, falls F keine reellen Primdivisoren besitzt.

Zu (1): Sei $f \neq 0$ eine Summe von Quadraten in F, die keine reellen Null- oder Polstellen besitzt. Sei $\mathfrak{v}$ eine reelle Stelle von K mit $X(K_{\mathfrak{v}}) \neq \emptyset$. Da f keine reellen Null- oder Polstellen besitzt und Summe von Quadraten ist, so ist die von f definierte Funktion $f_{\mathfrak{v}} : X(K_{\mathfrak{v}}) \to K_{\mathfrak{v}}$ stetig und strikt positiv. Da $X(K_{\mathfrak{v}})$ ein kompakter topologischer Raum ist, gibt es positive Schranken $0 < c' \leq c'' < \infty$ derart, daß $c' \leq f_{\mathfrak{v}} \leq c''$.

Wir setzen nun $f' = f - (af+b)^2$, wobei a, b rationale Zahlen sind derart, daß sie sehr kleinen Absolutbetrag haben, und $4ab-1$ ein Quadrat in $\mathbb{Q}_2$ ist, z.B. $a = b = 1/2^k$ mit $k >> 0$. Für solche a und b, und $q = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ die reduzierte Norm der Hamiltonschen Quaternionenalgebra gilt:

Ist $\mathfrak{v}$ eine reelle Stelle von K wie oben, so ist $f'_{\mathfrak{v}} \approx f_{\mathfrak{v}}$ auf $X(K_{\mathfrak{v}})$. Insbesondere ist f' positiv definit auf $X(K_{\mathfrak{v}})$. Daher gilt:

- *Ist $\mathfrak{v}$ unendlich, so wird f' von q über $FK_{\mathfrak{v}}$ dargestellt.*

Als nächstes bemerken wir, daß f' dargestellt werden kann wie folgt:

$$f' = -[(af + b - 1/2a)^2 + (4ab-1)/(2a)^2],$$

somit ist $f' = -\big(\text{Summe von zwei Quadraten}\big)$ in $\mathbb{Q}_2(f)$. Da -1 eine Summe von vier Quadraten in $\mathbb{Q}_2$ ist, so folgt: f' is Summe von vier Quadraten in $\mathbb{Q}_2(f)$. Insbesondere gilt:

- *Ist $\mathfrak{v}$ 2-adisch, so wird f' von q über $FK_{\mathfrak{v}}$ dargestellt.*

Schließlich, q ist hyperbolish über $\mathbb{Q}_p$ (alle $p \neq 2$), and somit über jede Körpererweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Somit gilt:

- *Ist $\mathfrak{v}$ p-adisch mit $p \neq 2, \infty$, so wird f' von q über $FK_{\mathfrak{v}}$ dargestellt.*

Nach dem Katoschen Lokal–Global Prinzip für reduzierte Normen folgt: f' wird von q über F dargestellt. Sodann gilt in F folgendes:

$$f = (af+b)^2 + \big(\text{Summe von vier Quadraten}\big) = \big(\text{Summe von fünf Quadraten}\big).$$

Dem Beweis von (2) schicken wir folgende Behauptung voraus:

Behauptung. *Sei $f \neq 0$ eine Summe von Quadraten in F. Dann existiert eine Summe von zwei Quadraren u^2+v^2 von F derart, daß $\big(u^2+v^2\big)^{\text{reell}} = \big(f\big)^{\text{reell}}$. Insbesondere hat $f/(u^2+v^2)$ keine reellen Null- oder Polstellen.*

Beweis Beh. Ist $\big(f\big)^{\text{reell}} = 0$, so kann man z.B. $u = 1$ und $v = 0$ nehmen. Dies erledigt also auch den Fall, wo X keine reellen Primdivisoren besitzt.

Sei nun $\big(f\big)^{\text{reell}} \neq 0$. Nach obigem d) gibt es reelle positive divisoren A und B von X mit $\big(f\big)^{\text{reell}} = 2(A-B)$. Sei $C \neq 0$ ein beliebiger positiver total nicht-reeller Divisor von X. Ist $n >> 0$, so gibt es nach dem Riemannschen Satz Funktionen g', h' in F mit Poldivisoren $(g')_\infty = A + nC$ und $(h')_\infty = B + nC$. Nun setze man

$g = {g'}^2 + 1$ und $h = {h'}^2 + 1$. Offensichtlich ist $\big(g\big)^{\text{reell}} = -2A$ und $\big(h\big)^{\text{reell}} = -2B$ und somit, $\big(h/g\big)^{\text{reell}} = 2(A - B)$. Andererseits ist h/g darstellbar als Summe von zwei Quadraten $h/g = u^2 + v^2$ in F (weil die Menge der nicht-verschwindenden Summen von zwei Quadraten in F eine Untergruppe von $F^{\times}$ ist).

Zu (2): Sei $f \neq 0$ eine Summe von Quadraten in F. Nach der obigen Behauptung gibt es Funktionen $u, v, f_0, ..., f_4$ in F so, daß

$$f/(u^2 + v^2) = f_0^2 + ... + f_4^2.$$

Nun sind $(u^2 + v^2)f_0^2$, $(u^2 + v^2)(f_1^2 + f_2^2)$ und $(u^2 + v^2)(f_3^2 + f_4^2)$ Summen von je zwei Quadraten, somit ist f Summe von höchstens sechs Quadraten in F.

Literatur

[CT–J] Colliot-Thélène, J.-L. – Jannsen, U.:
Sommes de carrés dans les corps de fonctions, C. R. Acad. .Scie. Paris Sér. Math. **312** (1991), no. 11, 759–762.

[K] Kato, K.:
A Hasse principle for two-dimensional global fields. With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène, J. reine angew. Math. **366** (1986), 142–183.

[Po] Pourchet, Y.:
Sur la représentation en somme de carrés des polynomes à une indéterminé sur un corps de nombres algébriques, Acta Arith. **19** (1971), 89–104.