# Summen von Quadraten in arithmetischen Funktionenkörpern

von *Florian Pop* in Bonn

Ziel vorliegender Note ist folgender

**Satz.** *Sei $K$ ein beliebiger Zahlkörper und $F|K$ ein Funktionenkörper einer Variablen. Dann gilt:*

(1) *Ist $f \neq 0$ Summe von Quadraten in $F$, und besitzt $f$ keine reellen Null- oder Polstellen, so ist $f$ Summe von höchstens fünf Quadraten in $F$. Dies ist z.B. der Fall für alle Funktionen $f \neq 0$, wenn $F$ keine Anordnungen zuläßt.*

(2) *Im allgemeinen ist jede Summe von Quadraten in $F$ darstellbar als Summe von höchstens sechs Quadraten in $F$.*

*Beweis.* Das Hauptwerkzeug zum Beweis ist das Katosche Lokal–Global Prinzip für reduzierte Normen von Divisionsalgebren, siehe Kato [K]. Siehe hierzu auch Colliot-Thélènes Appendix in [K]; sowie Colliot-Thélène–Jannsen [CT–J] für höhere Dimensionen; und Pourchet [Po] für genauere Aussagen im Fall $F = K(t)$.

Wir können annehmen, daß $K$ der Konstantenkörper von $F$ ist. Sei $X \to K$ das glatte projektive Modell von $F|K$. Für eine beliebige Stelle $\mathfrak{v}$ von $K$ bezeichne $K_\mathfrak{v}$ die Kompletierung von $K$ an $\mathfrak{v}$, und $X(K_\mathfrak{v})$ die Menge der $K_\mathfrak{v}$-rationalen Punkte von $X$. Es gilt:

a) Ist $X(K_\mathfrak{v})$ nicht leer, so ist $X(K_\mathfrak{v})$ ein kompakter topologischer Raum, und jede Funktion $f \in F$ definiert eine stetige Abbildung $f_\mathfrak{v} : X(K_\mathfrak{v}) \to K_\mathfrak{v} \cup \infty$.

Für einen (Weil-)Primdivisor $P$ von $X$ sei $\kappa(P)$ der Restklassenkörper von $P$. Wir sagen das $P$ $\mathfrak{v}$-adisch ist, falls $\kappa(P)$ eine $K$-Einbettung in $K_\mathfrak{v}$ zuläßt. Entsprechend sagen wir, daß $P$ total nicht $\mathfrak{v}$-adisch ist, falls $\kappa(P)$ keine $K$-Einbettungen in $K_\mathfrak{v}$ zuläßt. Es gilt:

b) $X$ besitzt $\mathfrak{v}$-adische Primdivisoren $\Leftrightarrow$ $X(K_\mathfrak{v})$ ist nicht leer.

c) Ist $K_\mathfrak{v} \neq \mathbb{C}$, so besitzt $X$ (viele) total nicht $\mathfrak{v}$-adische Primdivisoren.

Wir sagen, daß ein Primdivisor $P$ von $F|K$ reell ist, falls $P$ $\mathfrak{v}$-adisch bezüglich einer reellen Stelle $\mathfrak{v}$ von $K$ ist, und daß $P$ total nicht reell ist, falls $P$ total nicht $\mathfrak{v}$-adisch für alle reellen Stellen $\mathfrak{v}$ von $K$ ist. Allgemeiner, ein divisor $A$ von $F|K$ heiße reell, falls in seinem Träger nur reelle Primdivisoren vorkommen, und total nicht reell, falls in seinem Träger nur total nicht reelle Primdivisoren vorkommen. Jeder Divisor $A$ von $X$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$A = A^{\text{reell}} + A^{\text{t.n. reell}}$$

mit $A^{\text{reell}}$ reell und $A^{\text{t.n. reell}}$ total nicht reell. Es gilt:

d) Ist $f \neq 0$ Summe von Quadraten in $F$, so kann $\big(f\big)^{\text{reell}}$ dargestellt werden in der Form $\big(f\big)^{\text{reell}} = 2A$ mit $A$ reellem Divisor von $X$. Hier ist $A = 0$ zugelassen, sodaß diese Bedingung leer ist, falls $F$ keine reellen Primdivisoren besitzt.

Zu (1): Sei $f \neq 0$ eine Summe von Quadraten in $F$, die keine reellen Null- oder Polstellen besitzt. Sei $\mathfrak{v}$ eine reelle Stelle von $K$ mit $X(K_\mathfrak{v}) \neq \emptyset$. Da $f$ keine reellen Null- oder Polstellen besitzt und Summe von Quadraten ist, so ist die von $f$ definierte Funktion $f_\mathfrak{v} : X(K_\mathfrak{v}) \to K_\mathfrak{v}$ stetig und strikt positiv. Da $X(K_\mathfrak{v})$ ein kompakter topologischer Raum ist, gibt es positive Schranken $0 < c' \leq c'' < \infty$ derart, daß $c' \leq f_\mathfrak{v} \leq c''$.

Wir setzen nun $f' = f - (af + b)^2$, wobei $a, b$ rationale Zahlen sind derart, daß sie sehr kleinen Absolutbetrag haben, und $4ab - 1$ ein Quadrat in $\mathbb{Q}_2$ ist, z.B. $a = b = 1/2^k$ mit $k >> 0$. Für solche $a$ und $b$, und $q = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ die reduzierte Norm der Hamiltonschen Quaternionenalgebra gilt:

Ist $\mathfrak{v}$ eine reelle Stelle von $K$ wie oben, so ist $f'_\mathfrak{v} \approx f_\mathfrak{v}$ auf $X(K_\mathfrak{v})$. Insbesondere ist $f'$ positiv definit auf $X(K_\mathfrak{v})$. Daher gilt:

- *Ist $\mathfrak{v}$ unendlich, so wird $f'$ von $q$ über $FK_\mathfrak{v}$ dargestellt.*

Als nächstes bemerken wir, daß $f'$ dargestellt werden kann wie folgt:

$$f' = -[(af + b - 1/2a)^2 + (4ab - 1)/(2a)^2],$$

somit ist $f' = -\big(\text{Summe von zwei Quadraten}\big)$ in $\mathbb{Q}_2(f)$. Da $-1$ eine Summe von vier Quadraten in $\mathbb{Q}_2$ ist, so folgt: $f'$ is Summe von vier Quadraten in $\mathbb{Q}_2(f)$. Insbesondere gilt:

- *Ist $\mathfrak{v}$ 2-adisch, so wird $f'$ von $q$ über $FK_\mathfrak{v}$ dargestellt.*

Schließlich, $q$ ist hyperbolish über $\mathbb{Q}_p$ (alle $p \neq 2$), and somit über jede Körpererweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Somit gilt:

- *Ist $\mathfrak{v}$ $p$-adisch mit $p \neq 2, \infty$, so wird $f'$ von $q$ über $FK_\mathfrak{v}$ dargestellt.*

Nach dem Katoschen Lokal–Global Prinzip für reduzierte Normen folgt: $f'$ wird von $q$ über $F$ dargestellt. Sodann gilt in $F$ folgendes:

$$f = (af + b)^2 + \big(\text{Summe von vier Quadraten}\big) = \big(\text{Summe von fünf Quadraten}\big).$$

Dem Beweis von (2) schicken wir folgende Behauptung voraus:

**Behauptung.** *Sei $f \neq 0$ eine Summe von Quadraten in $F$. Dann existiert eine Summe von zwei Quadraren $u^2 + v^2$ von $F$ derart, daß $\big(u^2 + v^2\big)^{\text{reell}} = \big(f\big)^{\text{reell}}$. Insbesondere hat $f/(u^2 + v^2)$ keine reellen Null- oder Polstellen.*

*Beweis Beh.* Ist $\big(f\big)^{\text{reell}} = 0$, so kann man z.B. $u = 1$ und $v = 0$ nehmen. Dies erledigt also auch den Fall, wo $X$ keine reellen Primdivisoren besitzt.

Sei nun $\big(f\big)^{\text{reell}} \neq 0$. Nach obigem d) gibt es reelle positive divisoren $A$ und $B$ von $X$ mit $\big(f\big)^{\text{reell}} = 2(A - B)$. Sei $C \neq 0$ ein beliebiger positiver total nicht-reeller Divisor von $X$. Ist $n >> 0$, so gibt es nach dem Riemannschen Satz Funktionen $g', h'$ in $F$ mit Poldivisoren $(g')_\infty = A + nC$ und $(h')_\infty = B + nC$. Nun setze man

$g = g'^2 + 1$ und $h = h'^2 + 1$. Offensichtlich ist $\big(g\big)^{\text{reell}} = -2A$ und $\big(h\big)^{\text{reell}} = -2B$ und somit, $\big(h/g\big)^{\text{reell}} = 2(A-B)$. Andererseits ist $h/g$ darstellbar als Summe von zwei Quadraten $h/g = u^2 + v^2$ in $F$ (weil die Menge der nicht-verschwindenden Summen von zwei Quadraten in $F$ eine Untergruppe von $F^{\times}$ ist).

Zu (2): Sei $f \neq 0$ eine Summe von Quadraten in $F$. Nach der obigen Behauptung gibt es Funktionen $u, v, f_0, ..., f_4$ in $F$ so, daß

$$f/(u^2 + v^2) = f_0^2 + ... + f_4^2.$$

Nun sind $(u^2 + v^2)f_0^2$, $(u^2 + v^2)(f_1^2 + f_2^2)$ und $(u^2 + v^2)(f_3^2 + f_4^2)$ Summen von je zwei Quadraten, somit ist $f$ Summe von höchstens sechs Quadraten in $F$.

**Literatur**


[CT–J] Colliot-Thélène, J.-L. – Jannsen, U.:
*Sommes de carrés dans les corps de fonctions,* C. R. Acad. .Scie. Paris Sér. Math. **312** (1991), no. 11, 759–762.

[K] Kato, K.:
*A Hasse principle for two-dimensional global fields. With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène,* J. reine angew. Math. **366** (1986), 142–183.

[Po] Pourchet, Y.:
*Sur la représentation en somme de carrés des polynomes à une indéterminé sur un corps de nombres algébriques,* Acta Arith. **19** (1971), 89–104.